

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**ФГБОУ ВО «УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»**

**Инженерно-физический факультет высоких технологий**

**М. Б. Николотов**

**САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ**

Методические указания по изучению учебной дисциплины  
**«Сопротивление материалов»**

Ульяновск  
2019

**Николотов, М. Б.**

**Самостоятельная работа студентов:** методические указания по изучению учебной дисциплины «Сопротивление материалов» / М. Б. Николотов. – Ульяновск: УлГУ, 2019.- 25 с.

В методических указаниях приведены рекомендации по организации самостоятельной работы студентов при выполнении наиболее сложных индивидуальных заданий по дисциплине «Сопротивление материалов».

Предназначены для студентов специальностей 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» (специалитет) и 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» (бакалавриат).

Методические указания рекомендованы к введению в образовательный процесс решением Ученого Совета ИФФВТ УлГУ (протокол №11 от 18 июня 2019 г.)

© Николотов М. Б., 2019

© Ульяновский государственный университет, 2019

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

1. Расчеты валов на изгиб с кручением .....	4
2. Энергетические методы определения перемещений ... ..	9
3. Расчеты статически неопределимых плоских рам .....	10
4. Расчеты статически неопределимых балок .....	15
5. Расчеты сжатых стержней на устойчивость .....	20

## 1. Расчеты валов на изгиб с кручением

**Пример** – На вал круглого сплошного сечения насажены шестерня средним диаметром  $D_1 = 0,23$  м и шкив ременной передачи диаметром  $D_2 = 0,39$  м (рисунок 1, а). Вес шкива  $G = 600$  Н, собственным весом шестерни и вала пренебречь. Вал делает 660 об/мин и передает мощность, равную 40 кВт. Допустимое напряжение материала вала  $[\sigma] = 80$  МПа

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности.

*Решение*

Определяем внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив:

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3,14 \cdot 660} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов показана на рисунке 1, б.

Построение эпюры внутреннего силового фактора (крутящего момента  $M_{кр}$ ), возникающего в сечениях вала, производим по участкам слева направо:

- участок 1  $M_{кр} = 0$ ;
- участок 2  $M_{кр} = m = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;
- участок 3  $M_{кр} = m - m = 0$ .

Определяем окружное усилие  $F_1$ , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости:

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0,23} = 5035 \text{ Н}.$$

Рассчитываем изгибающую силу  $F_2$  от ременной передачи на шкиве, действующую на вал в горизонтальной плоскости:

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0,39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия вертикальных изгибающих сил показана на рисунке 1, в.

Для определения опорных реакций  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B = 0; \quad R_{Ay} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,8 - 600 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{4208}{1,2} = 3507 \text{ Н}.$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_{By} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,4 - 600 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{2554}{1,2} = 2128 \text{ Н.}$$

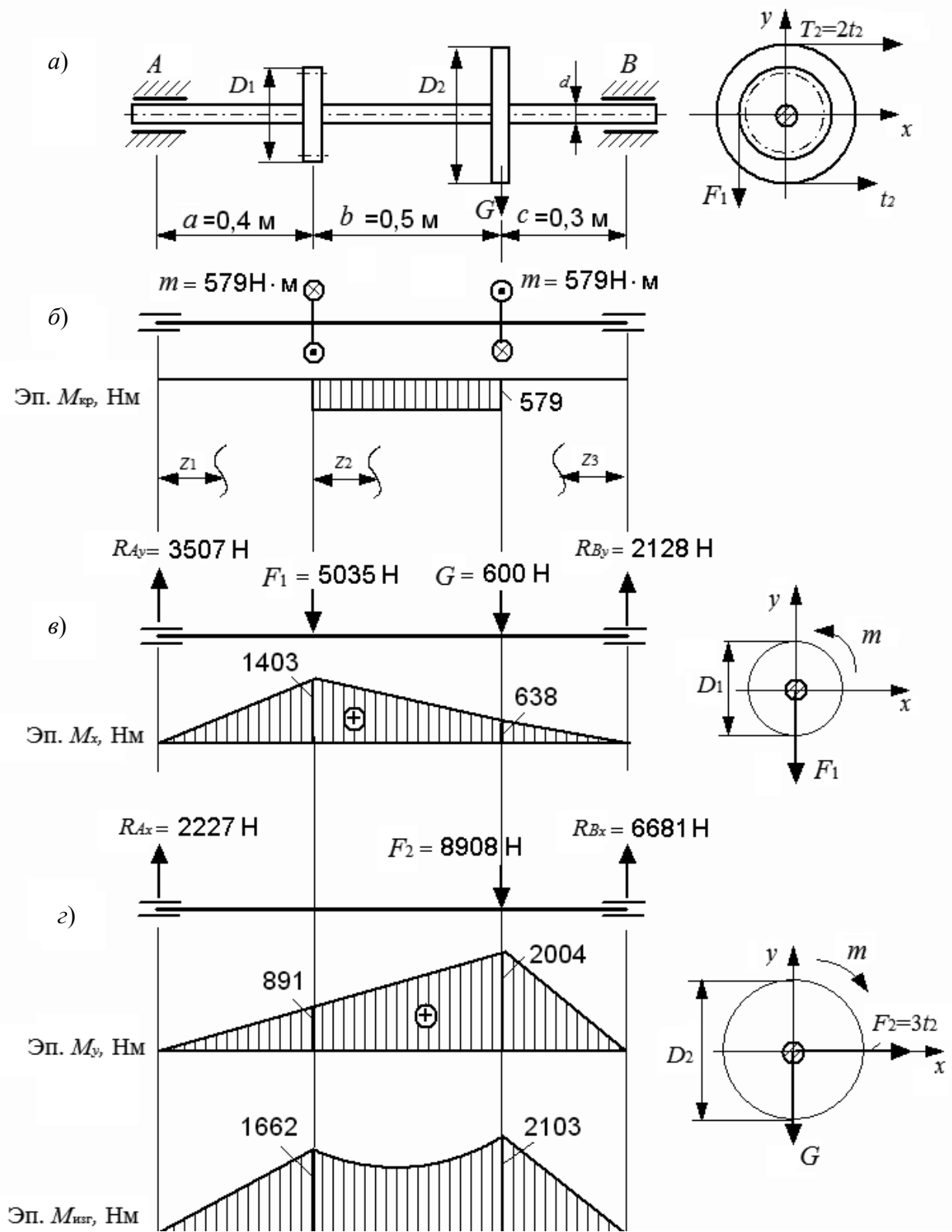


Рисунок 1 – Заданная схема вала и вспомогательные схемы и эпюры для примера 2 (эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  построены на сжатом волокне)

Выполним проверку:

$$\sum y = 0; \quad R_{Ay} - F_1 - G + R_{By} = 3507 - 5035 - 600 + 2128 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов  $M_x$  по участкам.

Участок 1 ( $0 \leq z_1 \leq 0,4$  м):

$$M_x = R_{Ay} \cdot z_1 = 3507 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 2 ( $0 \leq z_2 \leq 0,5$  м):

$$M_x = R_{Ay} \cdot (0,4 + z_2) - F_1 \cdot z_2 = 3507 \cdot (0,4 + z_2) - 5035 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 ( $0 \leq z_3 \leq 0,3$  м):

$$M_x = R_{By} \cdot z_3 = 2128 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Схема действия горизонтальных изгибающих сил, повернутых в плоскость чертежа, показана на рисунке 1.3, з.

Для определения опорных реакций  $R_{Ax}$  и  $R_{Bx}$  составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B = 0; \quad R_{Ax} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ax} = \frac{2672,4}{1,2} = 2227 \text{ Н}.$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_{Bx} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{Bx} = \frac{8017,2}{1,2} = 6681 \text{ Н}.$$

Выполним проверку:

$$\sum x = 0; \quad R_{Ax} - F_2 + R_{Bx} = 2227 - 8908 + 6681 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов  $M_y$  по участкам.

Участок 1 ( $0 \leq z_1 \leq 0,4$  м):

$$M_y = R_{Ax} \cdot z_1 = 2227 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 2 ( $0 \leq z_2 \leq 0,5$  м):

$$M_y = R_{Ax} \cdot (0,4 + z_2) = 2227 \cdot (0,4 + z_2);$$

$$z_2 = 0; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 ( $0 \leq z_3 \leq 0,3$  м):

$$M_y = R_{Bx} \cdot z_3 = 6681 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Вычисляем значения полных изгибающих моментов  $M_{изг}$  в характерных сечениях вала по формуле

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2};$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

Эпюра полных изгибающих моментов  $M_{изг}$  показана на рисунке 1.

Опасным сечением вала является сечение по месту расположения шкива диаметром  $D_2$ , т. к. в нем действуют наибольший изгибающий момент  $M_{изг} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и крутящий момент  $M_{кр} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Определяем значение эквивалентного момента в опасном сечении вала по четвертой теории прочности:

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Рассчитываем диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{IV}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2162}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,065 \text{ м} = 65 \text{ мм.}$$

Диаметр вала принимаем равным  $d = 65$  мм.

### Задания для самостоятельной работы

На вал круглого сплошного сечения диаметром  $d$  насажены шестерня средним диаметром  $D_1$  и шкив ременной передачи диаметром  $D_2$  (рисунок 2). Вес шкива равен  $G$ , собственными весами вала и шестерни пренебречь. Вал делает  $n$  оборотов в минуту и передает мощность, равную  $N$  киловатт. Допускаемое напряжение материала вала  $[\sigma] = 80$  МПа.

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности. Исходные данные к задаче представлены в таблице 1.

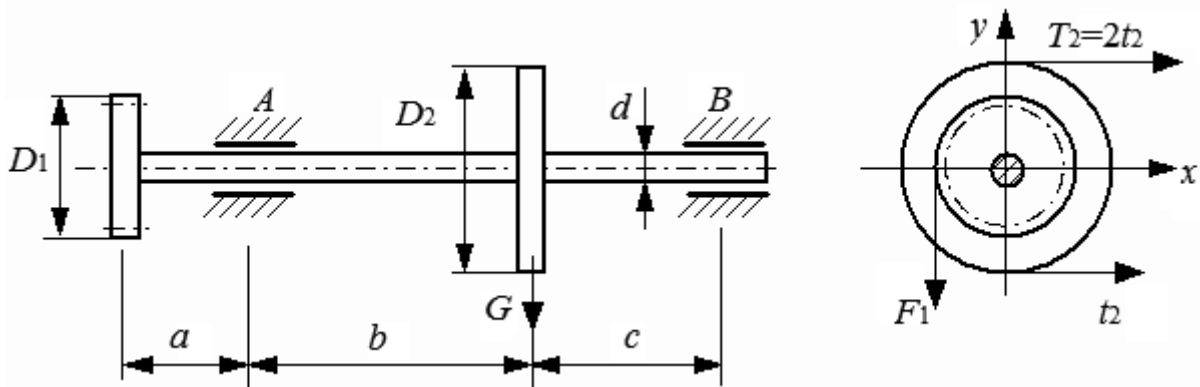


Рисунок 2 – Расчетная схема вала

Таблица 1 – Значения исходных данных

Номер строки	$N$ , кВт	$n$ , об/мин	$G$ , Н	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$D_1$ , мм	$D_2$ , мм
1	10	1100	200	0,11	0,41	0,31	110	310
2	20	1200	220	0,12	0,42	0,32	120	320
3	30	1300	240	0,13	0,43	0,33	130	330
4	40	1400	260	0,14	0,44	0,34	140	340
5	50	1500	280	0,15	0,45	0,35	150	350
6	60	1600	300	0,16	0,46	0,36	160	360
7	70	1700	320	0,17	0,47	0,37	170	370
8	80	1800	340	0,18	0,48	0,38	180	380
9	90	1900	360	0,19	0,49	0,39	190	390
10	100	2000	380	0,20	0,50	0,40	200	400



## 2. Энергетические методы определения перемещений

**Пример** – Определить линейное перемещение  $y_B$  и угловое перемещение  $\Theta_C$  методом Верещагина при  $EI_x = \text{const}$ .

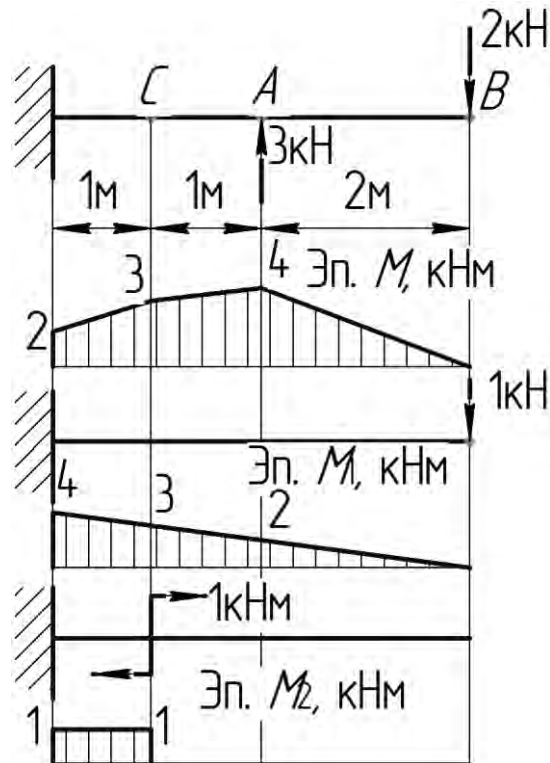


Рисунок 3 – Расчетная схема и эпюры моментов

*Решение*

Строим грузовую эпюру, предварительно определив изгибающие моменты.

Строим эпюры моментов от единичной силы и от единичного момента.

Определяем перемещения путем перемножения соответствующих эпюр.

Можно использовать готовую формулу перемножения трапеций, которая имеет вид:

$$\frac{l}{6} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + c \cdot b). \quad (2.1)$$

где  $a, b, c, d$  – основания трапеций.

Определяем линейное перемещение:

$$y_B = \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3) +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = \frac{68}{3} = 22,67 \text{ ед.}$$

Находим угловое перемещение:

$$\Theta_C = \frac{2+3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2,5 \text{ ед.}$$

### Задания для самостоятельной работы

Для приведенных расчетных схем определить линейное перемещение  $y_B$  и угловое перемещение  $\Theta_A$  методом Верещагина при  $EI_x = \text{const}$ .

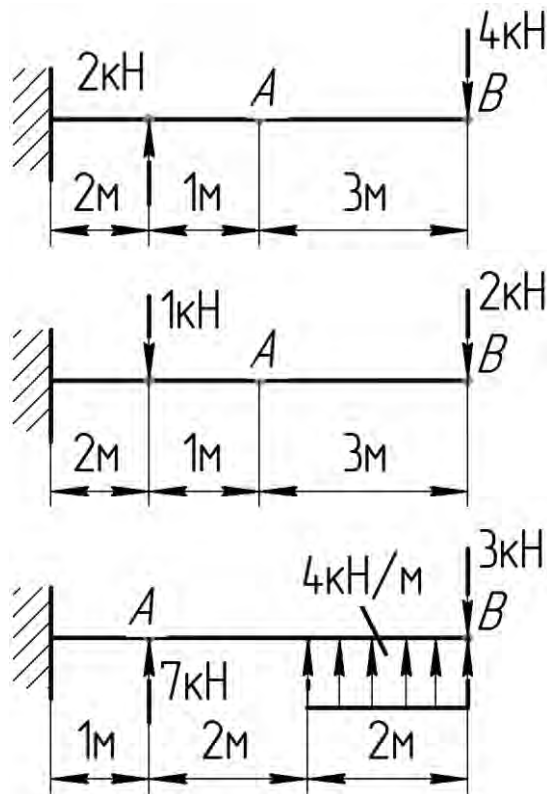


Рисунок 4 – Задания для самостоятельной работы

### 3. Расчеты статически неопределимых плоских рам

**Пример** – Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для заданной рамы (рисунок 5, а).

*Решение*

Находим степень статической неопределимости:

$$S = 8 + 0 - 3 = 4.$$

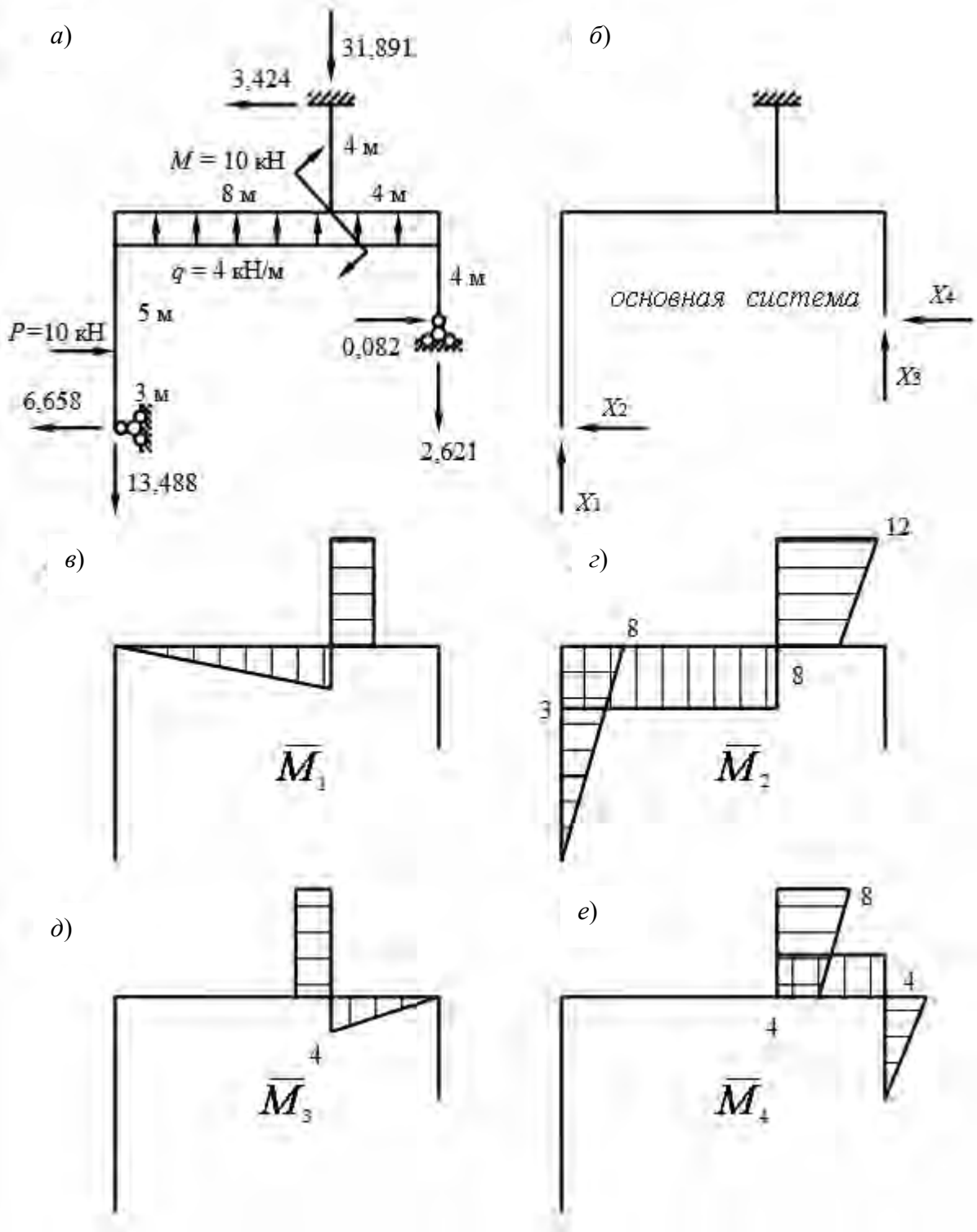
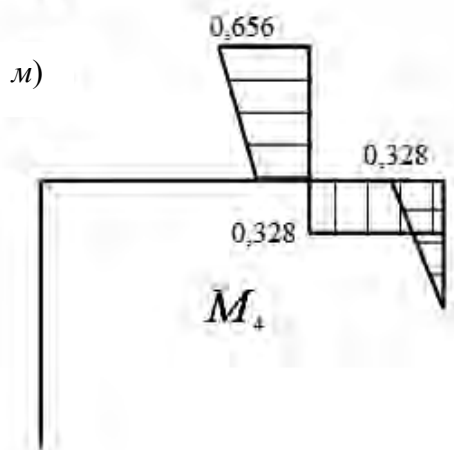
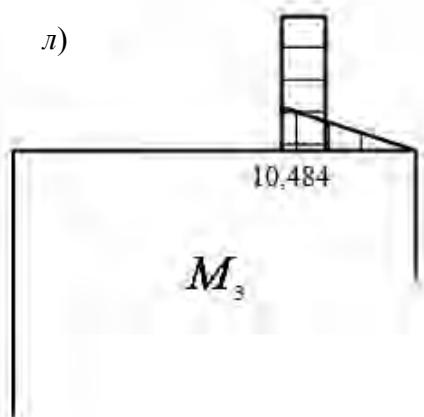
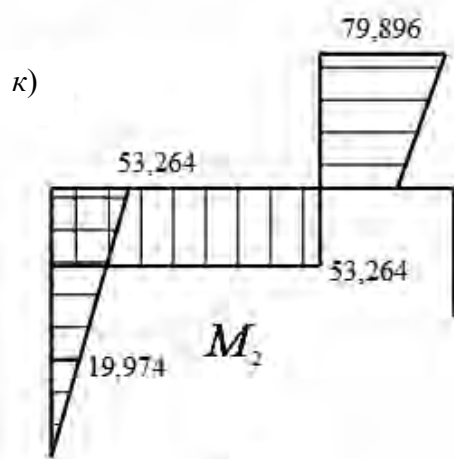
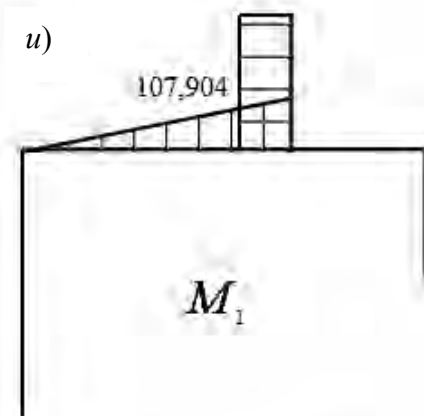
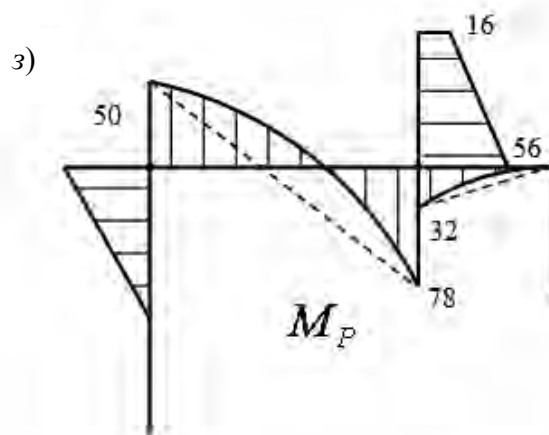
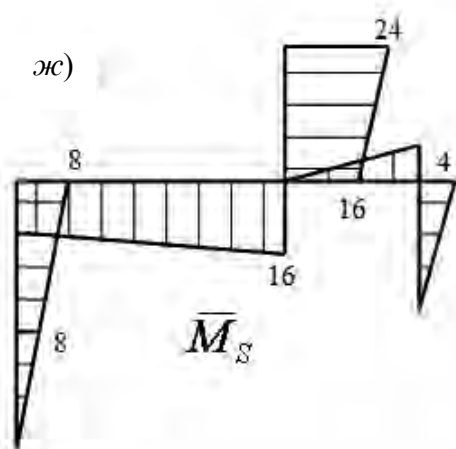
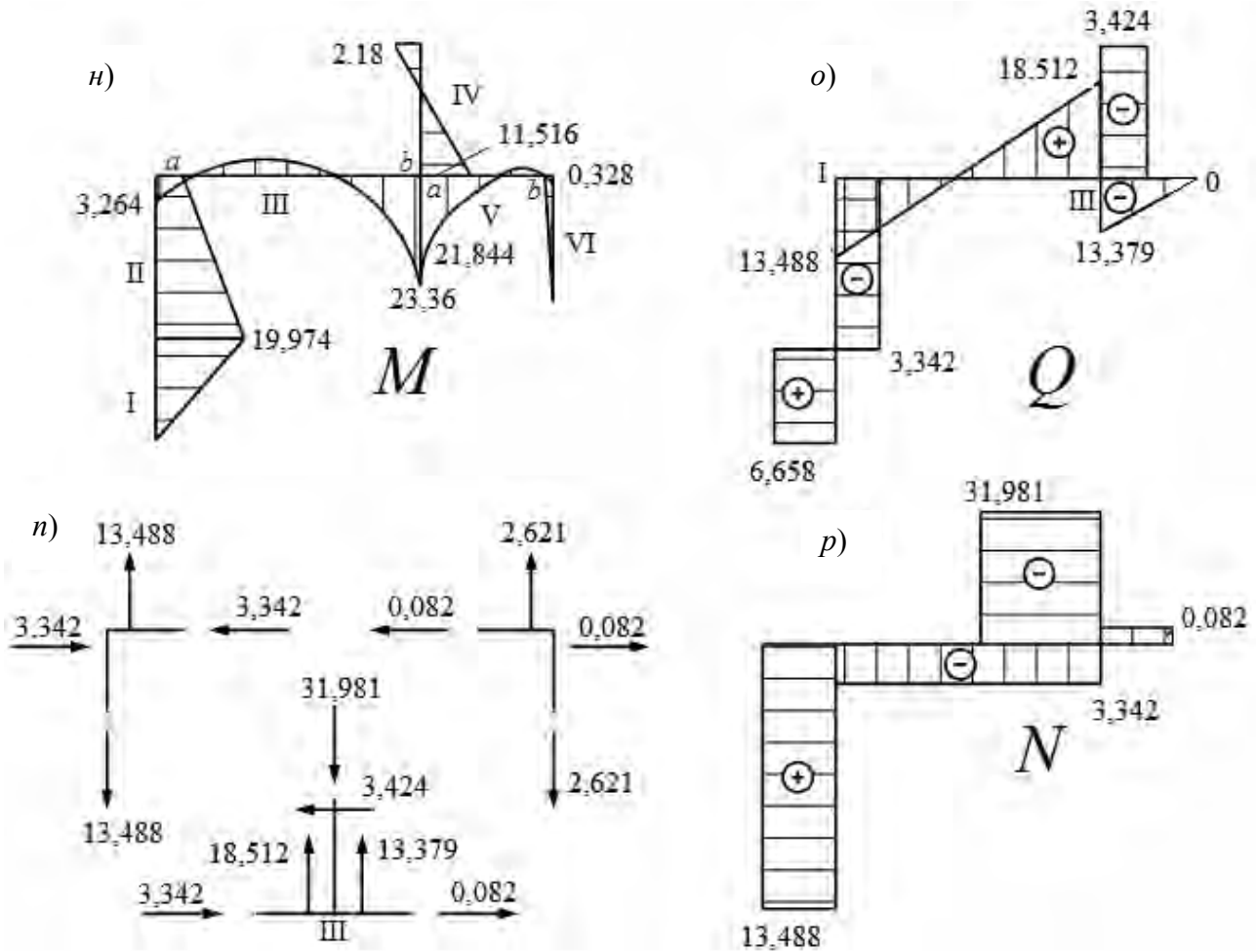


Рисунок 5 – Расчет статически неопределимой рамы методом сил



Продолжение рисунка 5



Окончание рисунка 5

Образовываем основную систему, отбрасывая четыре «лишние» связи (шарнирно-неподвижные опоры). Для расчета проще всего в качестве основной системы выбирать конструкцию с жестким защемлением (рисунок 5, б). Составляем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{14} \cdot X_4 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{24} \cdot X_4 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 + \Delta_{3P} = 0; \\ \delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{42} \cdot X_2 + \delta_{43} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4P} = 0. \end{cases}$$

Строим единичные эпюры изгибающих моментов  $\overline{M}_1$   $\overline{M}_2$   $\overline{M}_3$   $\overline{M}_4$ , а также грузовую эпюру моментов  $M_P$  от действия заданной нагрузки (см. рисунок 5, в-з). Суммарная единичная эпюра, получаемая сложением ординат единичных эпюр по участкам, представлена на рисунке 5, ж. Перемножая эпюры соответствующим образом, находим коэффициенты уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + 8 \cdot 4 \cdot 8 \right) = \frac{1280}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EI} = \left( \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 + \frac{12+8}{2} \cdot 4 \cdot 8 \right) = \frac{1728}{3EI};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_3}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (-8 \cdot 4 \cdot 4) = -\frac{384}{3EI};$$

$$\delta_{14} = \delta_{41} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_4}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{8+4}{2} \cdot 4 \cdot 8 \right) = \frac{576}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{M_P \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left( \frac{8}{6} \cdot (2 \cdot 78 \cdot 8 - 50 \cdot 8) - \frac{4 \cdot 8^3}{12} \cdot 4 + \frac{16+56}{2} \cdot 4 \cdot 8 \right) = \frac{4800}{3EI}.$$

Аналогично определяем остальные коэффициенты и свободные члены канонического уравнения метода сил.

Подставляя найденные значения в систему уравнений и решая ее, находим неизвестные усилия  $X_1$  и  $X_2$ :

$$\begin{cases} 1280 \cdot X_1 + 1728 \cdot X_2 - 384 \cdot X_3 + 576 \cdot X_4 + 4800 = 0; \\ 1728 \cdot X_1 + 3264 \cdot X_2 - 480 \cdot X_3 + 736 \cdot X_4 + 377 = 0; \\ -384 \cdot X_1 - 480 \cdot X_2 + 256 \cdot X_3 - 384 \cdot X_4 - 1344 = 0; \\ 576 \cdot X_1 + 736 \cdot X_2 - 384 \cdot X_3 + 704 \cdot X_4 + 1920 = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = -13,488 \text{ кН}, \quad X_2 = 6,658 \text{ кН}, \quad X_3 = -2,621 \text{ кН}, \quad X_4 = -0,082 \text{ кН}.$$

Умножая ординаты единичных эпюр  $\overline{M}_1$ ,  $\overline{M}_2$ ,  $\overline{M}_3$ ,  $\overline{M}_4$  на соответствующие усилия  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ , получаем «исправленные» эпюры изгибающих моментов  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  (рисунок 5, и-м). Суммируя ординаты эпюр  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  и  $M_P$  получаем окончательную эпюру моментов  $M$  (рисунок 5, н). Статической проверкой правильности построения эпюры моментов служит равновесие узлов. Проводим кинематическую проверку:

$$\delta = \frac{M \cdot \overline{M}_s}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 19,974 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 19,974 + 2 \cdot 8 \cdot 3,264 + 3,264 \cdot 3 + 19,974 \cdot 8) + \right. \\ \left. + \frac{8}{6} \cdot (2 \cdot 3,264 \cdot 8 + 2 \cdot 23,36 \cdot 16 + 3,264 \cdot 16 + 23,36 \cdot 8) - \frac{4 \cdot 8^3}{12} \cdot 12 + \right. \\ \left. + \frac{4}{6} \cdot (-2 \cdot 2,18 \cdot 24 + 2 \cdot 11,56 \cdot 16 - 2,18 \cdot 16 + 11,56 \cdot 24) + \right. \\ \left. + \frac{4}{6} \cdot (-2 \cdot 0,328 \cdot 4 - 21,844 \cdot 4) + \frac{4 \cdot 4^3}{12} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,328 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \\ = -0,891.$$

По эпюре моментов строим эпюру поперечных сил (рисунок 5, *o*). Эпюру продольных сил (рисунок 5, *p*) строим способом вырезания узлов (рисунок 5, *n*).

Статическая проверка представлена на рисунке 5, *a*.

$$\sum X = 10 - 6,658 - 3,424 + 0,082 = 0;$$

$$\sum Y = -13,488 + 4 \cdot 12 - 31,891 - 2,621 = 0.$$

### Задания для самостоятельной работы

Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для заданных рам (рисунок 6), если  $P = 15 \text{ кН}$ ,  $m = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $a = 2 \text{ м}$ .

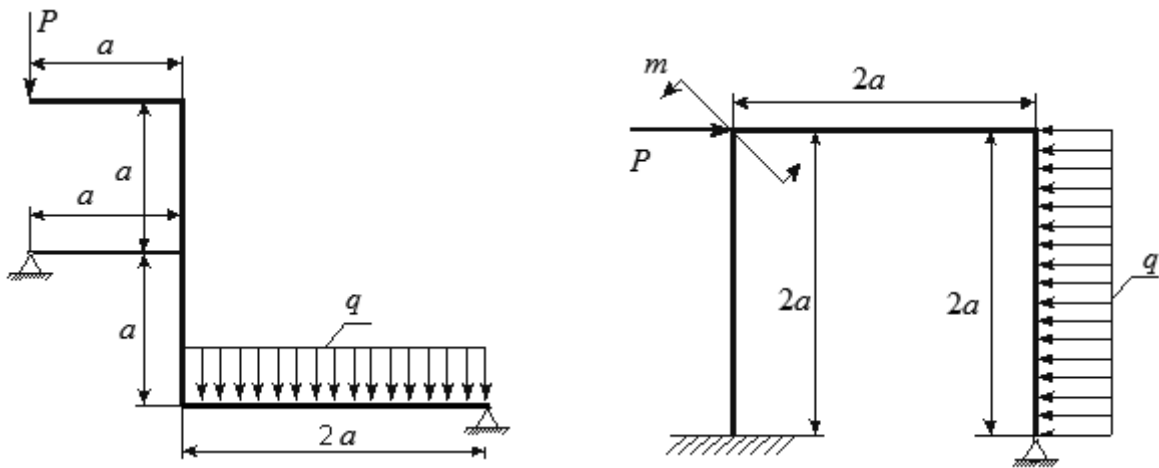


Рисунок 6 – Задания для самостоятельной работы

## 4. Расчеты статически неопределимых балок

**Пример** – Подобрать необходимое поперечное сечение в виде двутавра для статически неопределимой балки (рисунок 7), если допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

*Решение*

Находим степень статической неопределимости:

$$S = 5 - 3 = 2.$$

Образовываем основную систему, отбрасывая две «лишние» связи. Проще всего в качестве основной системы выбирать конструкцию с жестким

защемлением (рисунок 8, б). Составляем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

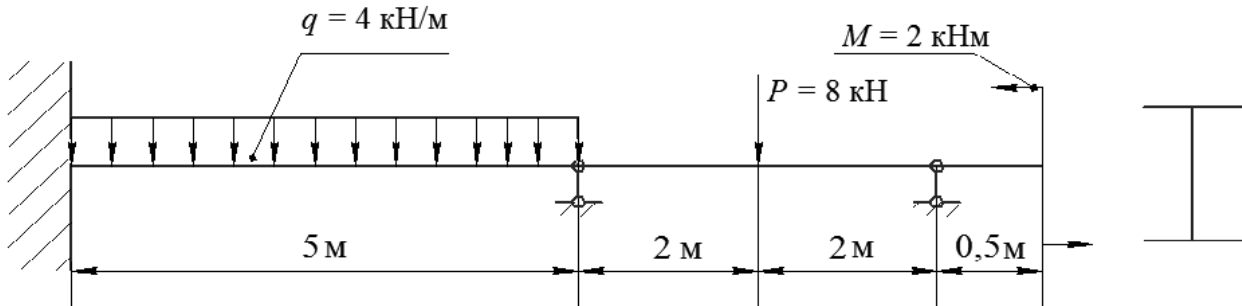


Рисунок 7 – Расчетная схема статически неопределимой балки

Показываем расчетные схемы и строим единичные эпюры изгибающих моментов  $\overline{M}_1$  и  $\overline{M}_2$  от действия  $\overline{X}_1=1$  и  $\overline{X}_2=1$ , а также грузовую эпюру моментов  $M_P$  от действия заданной нагрузки (рисунок 8, в-з). Перемножая эпюры соответствующим образом, находим коэффициенты уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{729}{3EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{125}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 9 \cdot 5 + 5 \cdot 4) = \frac{275}{3EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = \frac{M_P \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 14 + 14 \cdot 2 - 2 \cdot 4)) + \\ + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 14 + 2 \cdot 9 \cdot 104 + 14 \cdot 9 + 104 \cdot 4) - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{9+4}{2} = \frac{5614,5}{3EI}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{M_P \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (\frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 104 + 5 \cdot 14)) - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{2462,5}{3EI}.$$



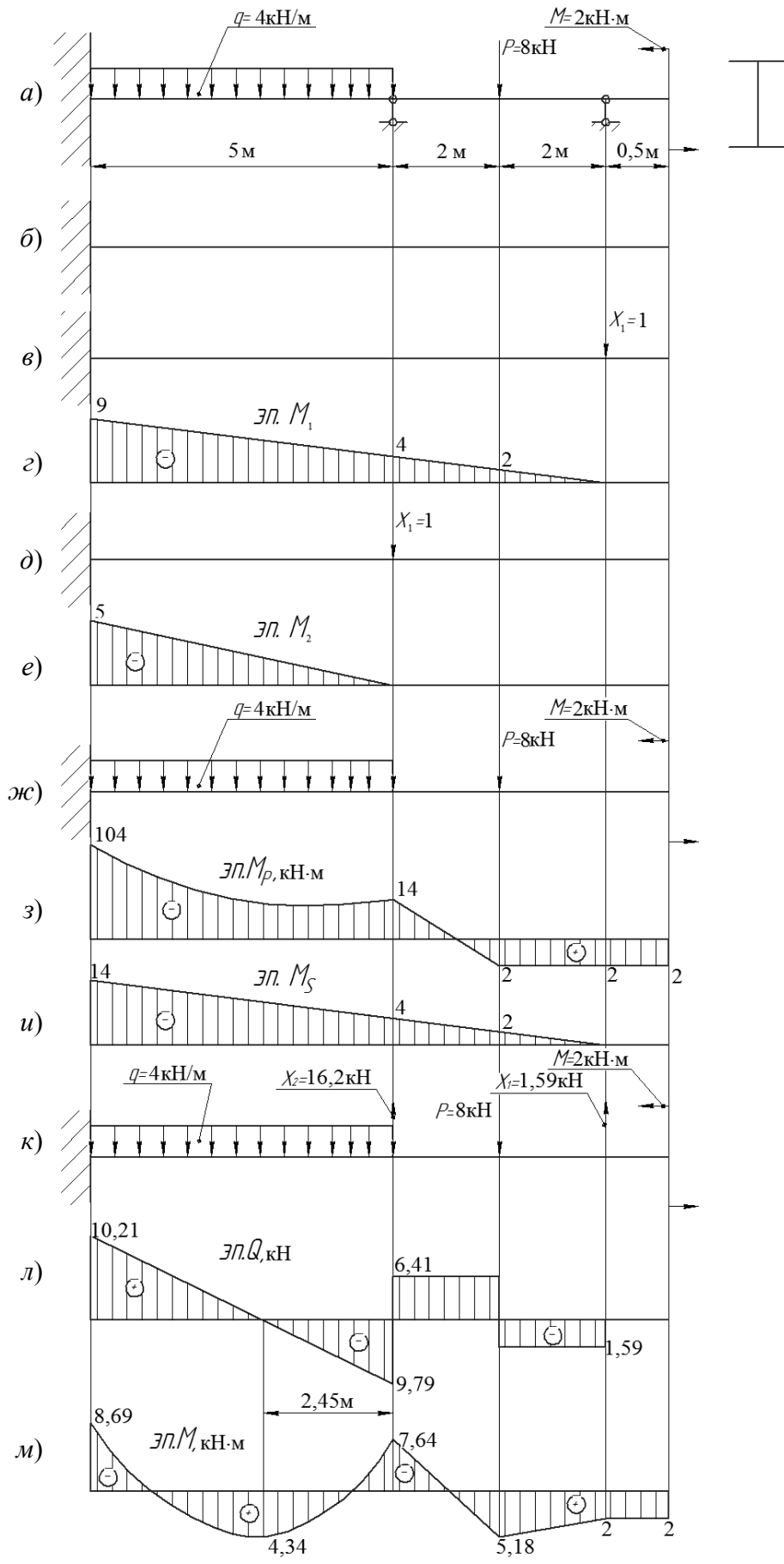


Рисунок 8 – К расчету статически неопределимой балки

Подставляя найденные коэффициенты в систему уравнений и решая ее, находим неизвестные усилия  $X_1$  и  $X_2$ :

$$\begin{cases} \frac{729}{3EI} \cdot X_1 + \frac{275}{3EI} \cdot X_2 + \frac{5614,5}{3EI} = 0; \\ \frac{275}{3EI} \cdot X_1 + \frac{125}{3EI} \cdot X_2 + \frac{2462,5}{3EI} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 729 \cdot X_1 + 275 \cdot X_2 + 5614,5 = 0; \\ 275 \cdot X_1 + 125 \cdot X_2 + 2462,5 = 0; \end{cases}$$

$$X_1 = -1,59 \text{ кН}, \quad X_2 = -16,2 \text{ кН}.$$

Суммарная единичная эпюра  $\overline{M}_s$ , получаемая сложением ординат единичных эпюр по характерным участкам, отображена на рисунке 8, *и*.

Показываем расчетную схему балки, приложив внешнюю нагрузку и найденные усилия  $X_1$  и  $X_2$ , причем направление  $X_1$  и  $X_2$  меняем на противоположное, т. к. по расчету они получились со знаком «-» (рисунок 8, *к*). Используя обычный метод сечений, строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рисунок 8, *л, м*).

Проводим деформационную проверку:

$$\begin{aligned} \delta = \frac{M \cdot \overline{M}_s}{EI} &= \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 5,18 - 2 \cdot 2) + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 5,18 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 7,64 + \right. \\ &+ 7,64 \cdot 2 - 5,18 \cdot 4) + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 14 \cdot 8,69 + 2 \cdot 7,64 \cdot 4 + 8,69 \cdot 4 + 7,64 \cdot 14) - \\ &\left. - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{14 + 4}{2} \right) = \frac{383,453 - 383,24}{EI} = \frac{0,213}{EI}. \end{aligned}$$

Процент расхождения

$$\delta = \frac{0,213}{383,24} \cdot 100 \% = 0,06 \% < 3 \%$$

Из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

выражаем осевой момент сопротивления:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{8,69 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,0543 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 54,3 \text{ см}^3.$$

Полученному значению соответствует двутавр № 12 (ГОСТ 8239–89), у которого  $W_x = 58,4 \text{ см}^3$ . Находим величину напряжения, возникающего в опасном сечении балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{8,69 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 148,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

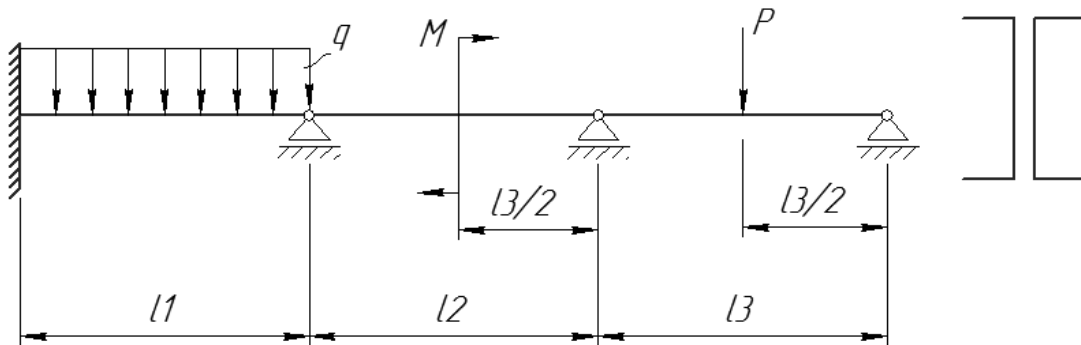
Таким образом, выбранный двутавр № 12 работает с небольшим запасом прочности в

$$\delta = \frac{160 - 148,8}{148,8} \cdot 100 \% = 7,5 \ \%.$$

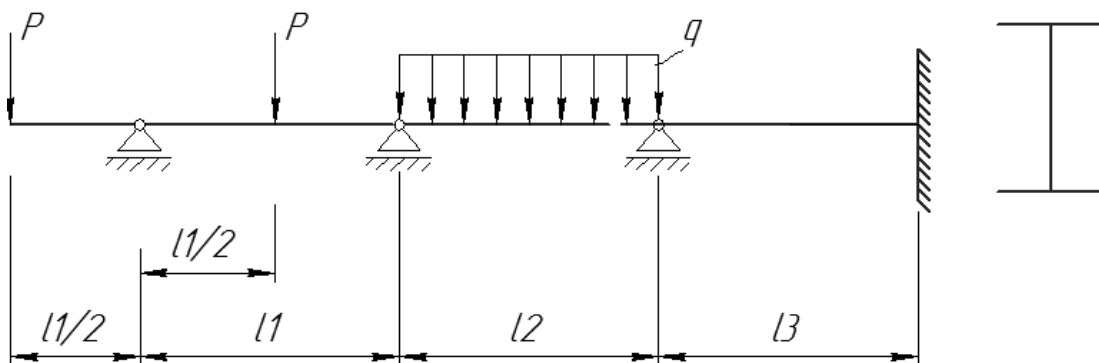
**Вывод:** для заданной балки выбрано поперечное сечение в виде двутавра № 12, для которого выполняется условие прочности.

### Задания для самостоятельной работы

Подобрать необходимое поперечное сечение для статически неопределимых балок (рисунок 9), если допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

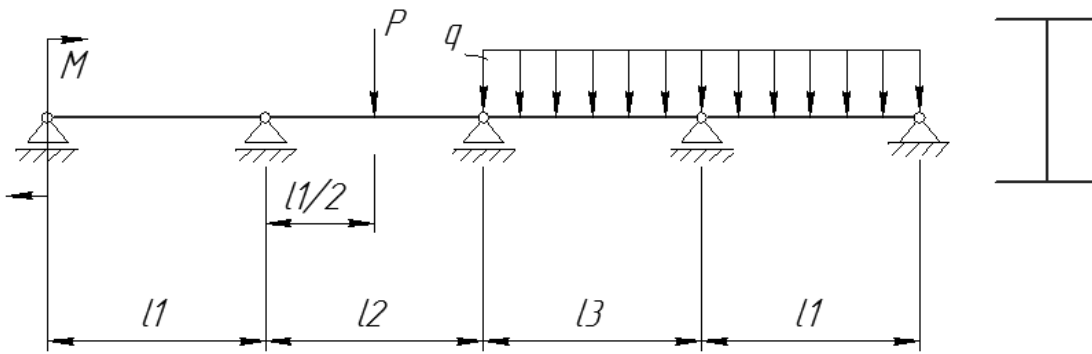


$$l_1 = 1 \text{ м}; l_2 = 2 \text{ м}; l_3 = 3 \text{ м}; P = 25 \text{ кН}; q = 20 \text{ кН/м}; m = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$



$$l_1 = 2 \text{ м}; l_2 = 1 \text{ м}; l_3 = 2 \text{ м}; P = 15 \text{ кН}; q = 40 \text{ кН/м}; m = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Рисунок 9 – Примеры заданий для самостоятельной работы



$$l_1 = 2 \text{ м}; l_2 = 4 \text{ м}; l_3 = 2 \text{ м}; P = 25 \text{ кН}; q = 40 \text{ кН/м}; m = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Окончание рисунка 9

## 5. Расчеты сжатых стержней на устойчивость

**Пример** – Подобрать размеры поперечного сечения колонны при помощи метода последовательных приближений, определить величину критической силы  $P_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости. Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

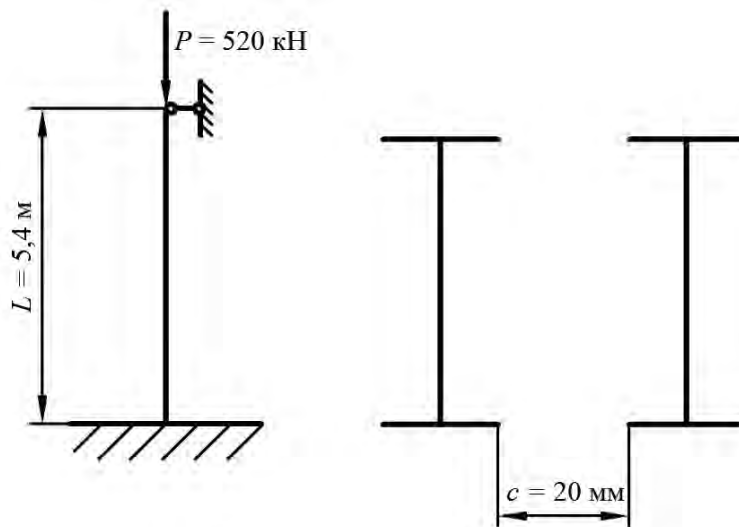


Рисунок 10 – Схема закрепления и поперечное сечение колонны

*Решение*

Расчет размеров поперечного сечения ведем методом последовательных приближений из условия устойчивости.

**Первое приближение.**

Пусть  $\varphi_1 = 0,5$ .

Тогда расчетная площадь одного двутавра

$$A_1^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 32,5 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 24:  $A_1^{об} = 34,8 \text{ см}^2$ ;  $I_{x1} = 3460 \text{ см}^4$ ;  $I_{y1} = 198 \text{ см}^4$ ;  $b_1 = 115 \text{ мм}$ .

Определяем геометрические характеристики всего сечения относительно главных центральных осей инерции  $X_c$  и  $Y_c$  (рисунок 511. Площадь сечения

$$A_1 = 2 \cdot A_1^{об} = 2 \cdot 34,8 = 69,6 \text{ см}^2.$$

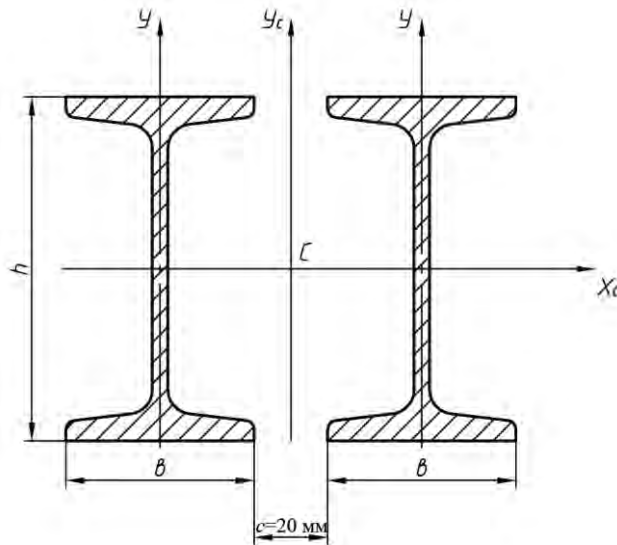


Рисунок 11 – Поперечное сечение колонны

Главные центральные моменты инерции сечения

$$I_{xc1} = 2 \cdot (I_{x1} + a^2 \cdot A_1) = 2 \cdot (3460 + 0^2 \cdot 34,8) = 6920 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_{yc1} &= 2 \cdot (I_{y1} + b^2 \cdot A_1) = 2 \cdot \left( I_{y1} + \left( \frac{b_1}{2} + \frac{c}{2} \right)^2 \cdot A_1 \right) = \\ &= 2 \cdot \left( 198 + \left( \frac{11,5}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \cdot 34,8 \right) = 3567,15 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Главные центральные радиусы инерции

$$i_{xc1} = \sqrt{\frac{I_{xc1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{6920}{69,6}} = 9,97 \text{ см};$$

$$i_{y_c1} = \sqrt{\frac{I_{y_c1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{3567,15}{69,6}} = 7,16 \text{ см.}$$

Гибкость стержня относительно материальной оси  $X_c$

$$\lambda_{x1} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c1}} = \frac{0,7 \cdot 540}{9,97} = 37,91,$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины для заданной схемы закрепления колонны,  $\mu = 0,7$ .

Гибкость стержня относительно свободной оси  $Y_c$

$$\lambda_{y1} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c1}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{7,16}\right)^2} = 66,24.$$

Дальнейший расчет ведем по максимальной гибкости:  $\lambda_{\max} = \lambda_{y1} = 66,24$ .

Уточняем коэффициент продольного изгиба  $\varphi$ :  $\varphi = 0,86$  при  $\lambda = 60$ ,  $\varphi = 0,81$  при  $\lambda = 70$ .

Линейно интерполируя, получаем

$$\varphi'_1 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{70 - 60} \cdot (66,24 - 60) = 0,829.$$

Так как  $\varphi_1 \neq \varphi'_1$ , то проводим следующее приближение.

**Второе приближение.**

Коэффициент продольного изгиба рассчитываем следующим образом:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,829}{2} = 0,6645.$$

Повторяем расчет, как в первом приближении.

$$A_2^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,6645 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,445 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 24,45 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 20:  $A_2^{ог} = 26,8 \text{ см}^2$ ;  $I_{x2} = 1840 \text{ см}^4$ ;  $I_{y2} = 115 \text{ см}^4$ ;  $b_2 = 100 \text{ мм}$ .

Геометрические характеристики сечения

$$A_2 = 2 \cdot A_2^{ог} = 2 \cdot 26,8 = 53,6 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_c2} = 2 \cdot 1840 = 3680 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c1} = 2 \cdot \left(115 + \left(\frac{10}{2} + \frac{2}{2}\right)^2\right) \cdot 26,8 = 2159,6 \text{ см}^4;$$

$$i_{x_c2} = \sqrt{\frac{I_{x_c2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{3680}{53,6}} = 8,29 \text{ см};$$

$$i_{y_c2} = \sqrt{\frac{I_{y_c2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{2159,6}{53,6}} = 6,35 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x2} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c2}} = \frac{0,7 \cdot 540}{8,29} = 45,6;$$

$$\lambda_{y_c} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c2}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{6,35}\right)^2} = 71,72;$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{y_c} = 71,72.$$

Уточняем коэффициент  $\varphi$ : при  $\lambda = 70$   $\varphi = 0,81$ , при  $\lambda = 80$   $\varphi = 0,75$ . Тогда

$$\varphi'_2 = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} \cdot (71,72 - 70) = 0,8; \quad \varphi_2 \neq \varphi'_2.$$

**Третье приближение.**

Коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,6645 + 0,8}{2} = 0,732.$$

$$A_3^{\text{расч}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,732 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 22,2 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 18:  $A_3^{\text{об}} = 23,4 \text{ см}^2$ ;  $I_{x3} = 1290 \text{ см}^4$ ;  $I_{y3} = 82,6 \text{ см}^4$ ;  $b_3 = 90 \text{ мм}$ .

Геометрические характеристики сечения

$$A_3 = 2 \cdot A_3^{\text{об}} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_c3} = 2 \cdot 1290 = 2580 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c3} = 2 \cdot \left( 82,6 + \left( \frac{9}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \cdot 23,4 \right) = 1580,9 \text{ см}^4;$$

$$i_{x_c3} = \sqrt{\frac{I_{x_c3}}{A_3}} = \sqrt{\frac{2580}{46,8}} = 7,42 \text{ см};$$

$$i_{y_c3} = \sqrt{\frac{I_{y_c3}}{A_3}} = \sqrt{\frac{1580,9}{46,8}} = 5,81 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x3} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c3}} = \frac{0,7 \cdot 540}{7,42} = 50,49;$$

$$\lambda_{y3} = \sqrt{40^2 + \left( \frac{\mu \cdot L}{i_{y_c3}} \right)^2} = \sqrt{40^2 + \left( \frac{0,7 \cdot 540}{5,81} \right)^2} = 76,37;$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{y3} = 76,37.$$

Уточняем коэффициент  $\varphi$ :

$$\varphi'_3 = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} \cdot (76,37 - 70) = 0,772; \quad \varphi_3 \neq \varphi'_3.$$

**Четвертое приближение.**

Коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,732 + 0,772}{2} = 0,752.$$

$$A_4^{\text{расч}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_4 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,752 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 21,6 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 повторно выпадает двутавр № 18. Проверяем его устойчивость ( $A = 46,8 \text{ см}^2$ ;  $\lambda_{\max} = 76,37$ ;  $\varphi = 0,772$ ):

$$\sigma_{\text{уст}} = \frac{P}{A} = \frac{520 \cdot 10^3}{46,8 \cdot 10^{-4}} = 11,1 \cdot 10^7 \text{ Па} = 111 \text{ МПа};$$

$$\varphi[\sigma] = 0,772 \cdot 160 = 123,52 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 111 \text{ МПа} < \varphi \cdot [\sigma] = 123,52 \text{ МПа}.$$



Условие устойчивости соблюдается.

Так как значение максимальной гибкости для выбранного сечения не превышает предельного значения гибкости для стали  $\lambda_{\max} = 76,37 < \lambda_{\text{пред}} = 100$ , то критическую силу определяем по формуле Ясинского:

$$P_{кр} = (310 - 1,14 \cdot 76,37) \cdot 10^6 \cdot 46,8 \cdot 10^{-4} = 1043,35 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1043,35 \text{ кН},$$

где  $P_{кр}$  – коэффициенты формулы Ясинского для малоуглеродистой стали  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа.

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_{уст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{1043,35}{520} \approx 2.$$

**Вывод:** для заданной колонны выбрано поперечное сечение, состоящее из двух двутавров № 18, для которого выполняется условие устойчивости с коэффициентом запаса 2.

### Задания для самостоятельной работы

Подобрать размеры поперечного сечения колонны при помощи метода последовательных приближений, определить величину критической силы  $P_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости (рисунок 12. Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.

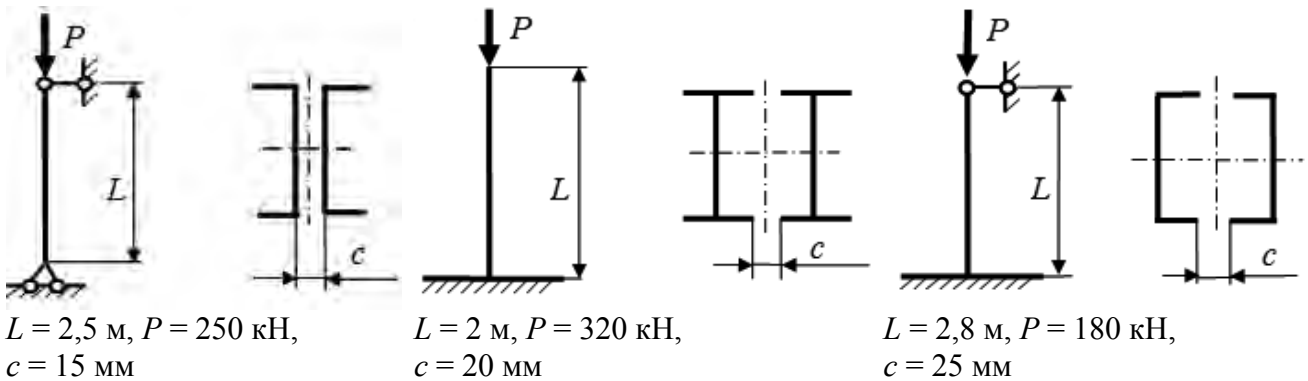


Рисунок 12 – Задания для самостоятельной работы

Составитель

  
подпись

доцент **Николотов М.Б.**

должность ФИО